

### 3. Übungsblatt „Analysis II“

Abgabe bis Montag 09.05.16 in der Vorlesung

---

#### 1. (Folgenraum)

Für  $1 \leq p < \infty$  sei

$$\ell^p = \left\{ \text{Folgen } x \text{ mit Folgengliedern } x_n \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

a) Beweisen Sie, dass  $\ell^p$  ein Banachraum bezüglich der  $p$ -Norm

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

ist.

b) Beweisen Sie, dass die Einheitskugel in  $\ell^p$  nicht kompakt ist.

#### 2. (Lineare Abbildungen)

Es sei  $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, T(x) = Ax$  für eine  $m \times n$  Matrix  $A$  mit Einträgen  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ . Beweisen Sie, dass

a)  $\sup_{\|x\|_{\infty} \leq 1} \|T(x)\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$

b)  $\max_{\lambda} \text{Eigenwert von } T \mid \lambda| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$

#### 3. ( $L^1$ -Raum)

Betrachten Sie die normierten Räume  $X = (C([0, 1]), \|\cdot\|_{L^1})$  und  $Y = (C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ , wobei  $\|\cdot\|_{\infty}$  die Supremumsnorm auf  $[0, 1]$  bezeichne und

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Beweisen Sie, dass

$$I : X \rightarrow Y, \quad I(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

eine wohldefinierte, lineare und stetige Abbildung ist.

#### 4. (Fixpunkte)

Es sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung. Es gebe  $c_n \geq 0$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ , so dass für alle  $x, y \in X$

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(y)) \leq c_n d(x, y)$$

gilt, wobei  $f^{\circ n}$  die  $n$ -fache Komposition von  $f$  ist. Beweisen Sie, dass  $f$  einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

**Die Fachschaft Mathematik feiert am 12.05 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 9.05., Di. 10.05. und Mi. 11.05. vor der Mensa Pop-pelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf [fsmath.uni-bonn.de](http://fsmath.uni-bonn.de)**